10.1. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel – megoldások

2001 *a)* Prím után csak az irracionális, $\sqrt{2}$, 2, 2^2 *nem* kerülhet.
Természetes mögött egész, racionális, valós állhat.
Egész után racionális, valós állhat.
Racionális vagy irracionális mögött csak valós állhat.
$\sqrt{2}$ után irracionális vagy valós állhat.
2 után az irracionálist, $\sqrt{2}$, 2^2-t kivéve bármi állhat.
2^2 mögött természetes, egész, racionális, valós állhat.

b) Négyzet után lehet bármi.
Téglalap után paralelogramma vagy trapéz állhat.
Paralelogramma után trapéz állhat.
Rombusz után trapéz, deltoid, paralelogramma állhat.
Trapéz és deltoid után nem írhatunk semmit a listából.

c) Bármit is írunk előre, utána kerülhet az 1.
1 után nem írhatunk mást.
Prím mögé csak az 1-et írhatjuk.
10 után 5, 2 állhat.
9 után 3 állhat.
8 után 4, 2 állhat.
6 után 3, 2 állhat.
4 mögött 2 állhat.

d) A 9 és a prímek nem állhatnak elöl.
Elöl: 21, utána 7 állhat.
Elöl: 15, utána 5 állhat.

2002 *a)* Ha valami bogár, akkor rovar. *b)* Ha valami holló, akkor (az) fekete.

2003 *a)* Minden négyzet egyenlő oldalú. *b)* Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal is.

2004 *a)* Moziba viszi. *b)* Bármit tehet.

2005 *a)* Igen. *b)* Igen. *c)* Nem. *d)* Igen.

2006 *a)* $0:0$, $1:0$, $2:0$. b) $0:0$ és valamelyik csapatnak $1:0$, ill. $2:1$.
c) $0:0$ és valamelyik csapatnak $1:0$.

2007 *a)* Nem igaz.
b) Az állítás megfordítása igaz: *Ha a négyszög paralelogramma, akkor van párhuzamos oldalpárja.*
c) Trapézra.



2008 Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.

Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

A tétel feltételeit teljesítő háromszög oldalai közül a két rövidebbet befogóknak, a hosszabbat átfogónak nevezzük. Mivel egy háromszögben a 180º-os szögösszeg miatt csak egy 90º-os szög lehet, ráadásul ez a legnagyobb, ezért a derékszögnek a legnagyobb oldallal szemben kell lennie.

2009 *a)* A: Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma.

B: Ha egy háromszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.

C: Ha egy háromszög köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű.

b) B hamis, az összes többi igaz.

c) Egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha a köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja. Átfogó, Thalész-tétel.

2010 Két dolgot kell megfigyelnünk. Egyrészt az öt kosárban összesen 95 darab virág van. Másrészt Rózsa kijelentése *(kétszer annyi piros, mint fehér)* azt jelenti, hogy a virágok száma három többszöröse. Azaz olyan kosárra gondolt, amit 95-ből levonva hárommal osztható számot ad. Ilyen csak egy van, a 29 virágot tartalmazó. Bazsa Rózsa az első kosárra gondolt.

2011 Két megoldást mutatunk, tessék továbbiakat keresni!

Mindent elismétel, amit csak hall. Másképp: Ha hall valamit, akkor azt elismétli. Tudjuk hogy amint a következtetés első fele, vagyis a feltétel nem teljesül, az állítás nem lehet hazugság. Ez bekövetkezhet például akkor, ha a papagáj *süket.*

Mindent elismétel, amit csak hall… *Majd egy év múlva.* Az időtényezőről nem állított semmit a kereskedő!

2012 Próbáljuk ki a játékot, szerezzünk tapasztalatokat. A tapasztalat az lesz, hogy ezzel a módszerrel nem lehet egyenlővé tenni a két kupacot. Miért?

Legyen a két kupac különbsége n. Ha a kisebb kupacból veszünk el x darabot, akkor a nagyobb kupacba teszünk $2x$-et. A kupacok különbsége $n + 3x$-re változik. Ha a nagyobból veszünk el x-et és a kisebbikbe rakunk $2x$-et, akkor a különbség $n - 3x$-re változik. Mi a közös a két esetben? A $3x$: bármennyit is veszünk el bármelyik kupacból, a kupacok különbsége három többszörösével változik. Mivel eredetileg 2 volt, három többszöröseinek hozzáadásával vagy elvételével nem lehet 0.

Megjegyzés: A feladat megoldása során találtunk egy változatlan *(invariáns)* mennyiséget, ennek segítségével igazoltuk a sejtést. Az eljárást szokás *invariáns módszernek* is nevezni.

2013 Szedjük elemeire a kérdést. Két szereplője van: a *mindent megtanuló diák* és a *megtanulhatatlan matematika.* Bontsuk két következtetésre: először képzeljük el, milyen az, amikor van mindent megtanuló diák. Nyilvánvaló, hogy ő mindent megtanul, tehát nincs megtanulhatatlan. Ha van *mindent megtanuló diák,* akkor nincs *megtanulhatatlan matematika* (sem).

Most fordítsuk meg a dolgot. Induljunk ki abból, hogy a matematika megtanulhatatlan. Akkor viszont nincs egy diák sem, aki meg tudná tanulni. Ha a *matematika megtanulhatatlan,* akkor nincs *mindent megtanuló diák.*

Összegezve: azt nem jelenthetjük ki, hogy van mindent megtanuló diák, vagy hogy a matematika megtanulhatatlan. Ezt nem tudjuk eldönteni. Csak annyit jelenthetünk ki biztosan, hogy a kettő egyszerre nem létezhet, mert kizárják egymást.

Megjegyzés: A feladat alapja ez a ma már klasszikusnak számító kérdés Raymond Smullyantól: *Mi történik, ha egy megállíthatatlan ágyúgolyó egy megmozdíthatatlan oszlopnak ütközik?*



2014 Érdemes játszani a játékot, és úgy tapasztalatokat szerezni a lefolyásáról. Ha már kijátszottuk magunkat, és nem tudjuk a nyerő stratégiát, akkor gondolkodjunk! A játékot körökre oszthatjuk, minden körben a kezdő az első. Bármennyi szálat is vesz el az első egy-egy körben, a második mindig tud úgy elvenni, hogy a gyufák száma 9-cel csökkenjen. Így viszont 11 kör után 1 szál gyufa marad, amit az első a szabályok szerint nem tud elvenni, tehát a második – Péter – nyert.

Megjegyzés: Ebben a feladatban is az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség az egy körben elvett gyufák száma.

2015 A játékot osszuk körökre. Egy kör alatt mind a két játékos egyszer vesz el a kupacból. Figyeljük meg, hogy mivel 3, 4 vagy 5 szálat vehetnek el, az egyik a másik által elvett gyufák számát mindig ki tudja egészíteni 8-ra. Így 12 teljes kört tudnak lejátszani, azonban 4 szál marad, ami a kezdő győzelmét jelenti. Valóban, ebben a játékban a kezdőnek van nyerő stratégiája. Mégpedig a következő: első lépésben vegyen el 3 szálat, majd a második által elvett gyufákat egészítse ki 8-ra. A módszerrel 11 kör után (amiben mindig ő a második) $100 - (12 \cdot 8 + 3) = 1$ szál gyufa marad az asztalon, azaz az utoljára lépő nyert. Gabi tehát biztosan nyerni fog, ha kezd, és a fent leírt módszerrel játszik.

Megjegyzés: Ebben a feladatban is az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség az egy körben elvett gyufák száma.

2016 Mivel valakinek mindig vissza kell vinni a lámpát, célszerű a gyorsabb hölgyekkel megoldatni ezt a feladatot. Másrészt viszont a két fiút érdemes együtt átküldeni, így akkor csak egy hosszabb, 10 perces séta lesz (nincs külön 5 perces is). A kettőt csak úgy kombinálhatjuk, ha először a hölgyek mennek át (2 perc), majd Irma visszaviszi a fiúknak a lámpát (1 perc). Utána áthaladnak az urak (10 perc) és Vilma viszi vissza a lámpát (2 perc). Végül Irma és Vilma együtt átkelnek (2 perc). Így összesen 17 perc alatt átérnek a túloldalra.

2017 Nem. Figyeljünk a számok paritására! Három esetünk lehet:

A: Ha két páros számot töröl le az illető, akkor párost is ír vissza.

B: Ha két páratlant, akkor is párost ír vissza.

C: Ha egy párost és egy páratlant, akkor páratlant ír vissza.

Tekintsük át az eseteket, hogyan változik a páros és páratlan számok száma! *A*: –1 páros; *B*: –2 páratlan, +1 páros; *C*: –1 páros. Így a páratlan számok száma csak párosával változhat (egész pontosan kettővel csökken vagy nem változik). 1-től 30-ig a számok fele páros és páratlan, azaz 15 darab páratlan szám szerepel a táblán. Ahhoz, hogy az utolsó szám a 0 legyen, el kell tűnnie a páratlan számoknak, azaz számuknak 0-ra kell csökkenni. Azonban ha csak párosával csökkenhet a számuk, akkor soha nem érheti el 15-ről a nullát.

Megjegyzések: Az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség a páratlan számok darabszámának paritása.

A tanár természetesen a játék után úgy módosítja a feladatot, hogy aki kitalálja, miért nem ér véget a játék, annak mégiscsak beír egy ötöst. Így végül jószívű is lesz…

Skatulyaelv – megoldások

2018 *a)* Skatulyák: hét napjai. *b)* Skatulyák: hónap napjai.

2019 *a)* Skatulyák: év napjai. *b)* Skatulyák: hetek.

c) Az aktuális év heteinek számától függően: $52 \cdot 11 + 1 = 573$ vagy $53 \cdot 11 + 1 = 584$.

2020 *a)* 6; *b)* 37.

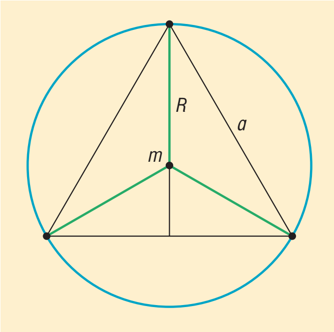


2021 $6 \cdot 7 = 42.$

2022 Skatulyák: 1, 3, 7, 9 végződések.

2023 Ebben a feladatban a skatulyák számát nem ismerjük. Kezdjük el képzeletben kettesével feltölteni a skatulyákat. Az 5.-nél már elfogyott $5 \cdot 2 = 10$ virgács, tehát a feladat szerint nem folytathatjuk a feltöltést. A 11. virgácsot pedig a már meglévő skatulyák egyikében kell elhelyezni, vagyis a skatulyák – így a virgácsfajták – száma 5. Ebből persze azt is tudjuk, hogy mindegyik fajta virgácsból 6 darab van a krampusz zsákjában.

2024 *a)* Egy játékos három nyilat dob el egy fordulóban. Osszuk fel a táblát három egybevágó 120°-os körcikkre úgy, hogy valamelyik nyíl éppen egy felosztó sugárra essen. Egy-egy ilyen körcikkben a két legtávolabbi pont a körív két végpontja. Számoljuk ki a távolságukat. A három vékony szakasz éppen szabályos háromszöget határoz meg. A feladat másképp megfogalmazva: adjuk meg a szabályos háromszög oldalát, ha ismerjük a köré írt kör sugarát.



Tudjuk, hogy $R = 16{,}75$ cm, és hogy a súlypont $1:2$ arányban osztja a súlyvonalat (a súlypont itt egybeesik a magasságponttal).

Először számoljuk ki a magasságot az oldalból a Pitagorasz-tétel segítségével:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Ennek kétharmada a sugár, vagyis:

$$\frac{2}{3} \cdot m = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = R = 16{,}75.$$

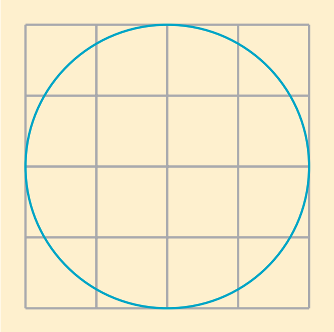
Ebből megkapjuk a-t: $a \approx 29$ cm.

Ha a fennmaradó két nyíl egy körcikkbe esik, akkor távolságuk 29 cm-nél kisebb.

Ha a fennmaradó két nyíl külön-külön körcikkbe esik, akkor legalább az egyik olyan körcikkben van, amelyik határoló sugarán van az elsőnek kijelölt dobás.

b) A táblában ekkor $6 \cdot 3 = 18$ nyíl van. Tekintsük a kör köré írható négyzetet (amelynek minden oldala érinti a kört). Ezt a négyzetet osszuk fel 16 egybevágó négyzetre. Egy négyzeten belül a legtávolabbi pontok a szemközti csúcsok, távolságuk a Pitagorasz-tétellel meghatározható:

$$\sqrt{2} \cdot 8{,}375 \approx 11{,}844.$$



A 16 négyzetben csak úgy lehet 18 nyíl, ha vagy 3, vagy 2-2 egy négyzetbe esik. Bármelyik eset is következik be, lesz 2-2 nyíl, amelyek távolsága biztosan kisebb, mint 11,9 cm.

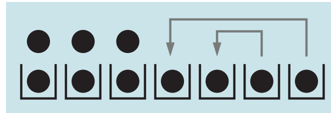
2025 *a)* Az állítás biztosan teljesül: a skatulyák a hét napjai, a megkérdezettek száma pedig ennél több.

b) Ez az állítás hamis. Képzeljük el például, hogy a sorban egymás után megkérdezettek mindig a következő napot mondják: hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap, hétfő, kedd, szerda. Nincs olyan nap, amit háromszor hallottunk volna.



c) Ez a kijelentés is hamis. Ha ugyanis mindenki ugyanazt a napot mondja, akkor nem teljesül.

d) Érdekes módon ez a kijelentés azt kívánja tőlünk, hogy fordítsuk meg a skatulyaelvet. Nem azt kell igazolnunk, hogy legalább mennyi elem kerül egy skatulyába, hanem hogy legfeljebb mennyi kerülhet legalább mennyi skatulyába.



Osszuk szét először a lehető legegyenletesebben az embereket a skatulyákban. Ekkor van három, amelybe 2-2-2 fő került. A leosztást csak úgy tudjuk változtatni, ha valahonnan elveszünk és azt máshova tesszük. Az állítás cáfolatához a kettes skatulyák számát akarjuk növelni, ezért vegyünk el valamelyik egyesből és tegyük is egyesbe. A második után elfogytak az egyes skatulyák, maradt kettő üres. Tovább nem tudjuk csökkenteni a legfeljebb egy főt tartalmazó skatulyák számát. Utolsó állításunk tehát igaz.

Megjegyzés: Más úton hamarabb célhoz érünk a *d)* kijelentésnél. Tételezzük fel az állítás ellenkezőjét, miszerint maximum egy olyan nap van, amit legfeljebb egy fő mond. Ehhez azonban legalább $6 \cdot 2 = 12$ főt kellett volna meginterjúvolnunk, így ez nem teljesülhet. Ha állításunk ellenkezője nem igaz, akkor állításunknak kell igaznak lennie.

Az előbb bemutatott gondolatmenetet *indirekt bizonyításnak* nevezzük.

2026 A feladat megoldásához először azt kell észrevennünk, hogy a négyzetszámok utolsó számjegyei nem lehetnek akármilyen számjegyek. Az utolsó számjegy csak 0, 1, 4, 5, 6, illetve 9 lehet:

$$1^2 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 3^2 = 9,\quad 4^4 = 16,\quad 5^2 = 25,\quad 6^2 = 36,$$

$$7^2 = 49,\quad 8^2 = 64,\quad 9^2 = 81,\quad 10^2 = 100\quad \text{stb.}$$

A feladat szerint két eset van.

Ha van köztük öttel osztható, akkor annak végződése 0 vagy 5.

Ha nincs köztük öttel osztható, akkor lehetséges végződésnek marad 1, 4, 6, 9. Ezek között kell lennie kettő azonosnak, hiszen öt számot adtunk meg. A kettő azonos különbsége pedig 10-zel osztható.

2027 Egy szám 7-tel osztva csak 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 maradékot adhat. Másképp fogalmazva $7k + 0$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$ alakú lehet (ahol k egész szám). A 7-tel való oszthatóság szempontjából ezek négyzetei csak 0, 1, 2, 4 maradékot adhatnak. Közülük a zérus 7-tel osztható számot jelöl, a többi három nem. Így a válasz: $n = 4$. Ugyanis 4 négyzetszám között vagy van 7-tel osztható (0 maradék); vagy ha nincs (1, 2, 4 maradék), akkor a négy szám között van kettő, ami azonos maradékot ad. Ezek különbsége pedig 0 maradékot ad, ami 7-tel osztható számot jelent.

Sorba rendezés I. (különböző elemek) – megoldások

2028 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6.$

2029 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$

2030 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$

2031 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$

2032 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120.$

2033 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$

2034 $11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11! = 39\,916\,800.$



Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek) – megoldások

2035 $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10.$

2036 $\dfrac{9!}{4!\cdot 5!}=126.$

2037 $\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=21.$

2038 $\dfrac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}=1260.$

2039 $\dfrac{10!}{4!\cdot 5!\cdot 1!}=1260.$

2040 *a)* $7!=5040;$ *b)* $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10;$ *c)* $\dfrac{12!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=39916800.$

2041 $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10.$

2042 *a)* Robinak $4+6+2=12$ filmje van DVD-n. Ezeket sorba $12!=479\,001\,600$-féleképpen rendezheti.

b) Előrevéve a vígjátékokat, azokat $4!$-féleképp helyezheti el. Utána a sci-fiket $6!$, majd a krimiket $2!$-féleképpen rendezheti sorba. Mivel a különböző típusú filmek sorrendjei nem függnek egymástól, ezért össze kell őket szoroznunk. Az eredmény: $4!\cdot 6!\cdot 2!=34\,560$.

c) A *b)* részfeladatban kapott eredményt meg kell szoroznunk még annyival, ahányféleképpen a három típust sorba tudja rakni a polcon. Mivel ez $3!$ lehetőség, így ennél a kérdésnél az eredmény: $3!\cdot 4!\cdot 6!\cdot 2!=207\,360$.

d) Nincs kikötve, hogy az azonos típusú filmek egymás mellé kerülnek. Ha minden filmet megkülönböztetünk, akkor $12!$-t kapunk. Mivel közöttük 4, 6, illetve 2 azonos van, így ezek maguk közötti sorrendjeit ($4!$, $6!$, $2!$) le kell számolnunk: $\dfrac{12!}{4!\cdot 6!\cdot 2!}=13\,860$.

2043 *a)* Sorban az ajtóhoz 4, az ablakhoz 3, a fal mellé 2, a kandalló elé 1 fő ülhet: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!=24$.

b) Ültessük le valahogy a négy főt képzeletben, majd kérjük meg őket, hogy üljenek át eggyel jobbra. Így a feladatban kérdezett asztal körüli sorrendjük nem változott. Mivel minden összeállításban négy egyforma ültetés van, az előző megoldást el kell osztanunk 4-gyel: $3!=6$.

c) Legyen a négy fő A, B, C, D. Szemeljük ki magunknak A-t, viszonyítsuk hozzá a többieket. A-nak két szomszédja lehet: B és C; vagy B és D; vagy C és D személyében (ekkor a negyedik fő már meghatározott). Ez összesen 3 lehetőség.

2044 *a)* Az első oszlopba egyféleképpen kerülhet egyetlen 1-es. A második oszlopot már $2!$-, a harmadikat $3!$-féleképp tölthetjük ki. Ezek egymástól függetlenek, tehát $3!\cdot 2!\cdot 1!=12$.

b) A négyfokú lépcsőnél nem változik semmi a gondolatmenetben: $4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!=288$.

c) Az eddigiek alapján n fokú lépcsőnél az eredmény: $n!\cdot(n-1)!\cdot\ldots\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$.

Megjegyzés: A *c)* részfeladat eredményét később teljes indukcióval igazolhatjuk.

2045 Tegyük fel, hogy Ernőnek eddig n érméje van, mind különböző. Ezeket $n!$-féleképpen teheti sorba. Ha még szerez hozzá kettőt, akkor $n + 2$ érméje lesz, amit $(n + 2)!$-féleképpen tud majd sorba rakni (a két új érmével együtt sem változik az a feltétel, hogy minden érme különböző).

Felírhatunk egy egyszerű egyenletet:

$$20 \cdot n! = (n + 2)!$$

Mivel a faktoriális szorzatot jelent, így a mindkét oldalon meglévő tényezőkkel tudunk egyszerűsíteni:

$$20 = (n + 1) \cdot (n + 2).$$

Mivel a 20 csak $4 \cdot 5$ formában bontható fel két egymást követő pozitív egész szám szorzatára, $n = 3$ a megoldás. Ernőnek tehát eddig összesen három érmét sikerült gyűjtenie. Tényleg nemrég kezdhette.

2046 A felső sarokból az alsó sarokba hat lépésben juthat le a katicabogár. A hat lépés során egyszer fog ferdén előre (a), kétszer ferdén jobbra (b) és háromszor ferdén balra (c) lépni. Minden lejutást egy a, b, b, c, c, c típusú sorozat fog jellemezni, ahol a betűk valamilyen sorrendje szerepel. Ha hat különböző elem lenne, 6! lenne a megoldás, viszont a két b-t 2!, a három c-t 3!-féleképp lehet sorba rakni. Az eredmény tehát $\dfrac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$.

Megjegyzés: A feladat térbeli megfelelője a gyakorlópéldák között található Barnabás-féle 2037. feladatnak.

2047 *a)* Mivel az egyes körcikkeket megkülönböztetjük, így az eredmény $n!$.

b) Ha csak a sorrendre koncentrálunk, akkor az elforgatással egymásba vihető színezések nem különböznek. (Tipikus körberakási feladat.) Azonban a vásznat n-féleképpen forgathatjuk, így az eredmény: $(n - 1)!$.

c) Azt kell észrevennünk, hogy a szomszédság nem változik, ha a körüljárási sorrendet megfordítjuk. Vagyis a *b)* részfeladatban kapott eredményt el kell osztanunk kettővel: $\dfrac{(n-1)!}{2}$.

Megjegyzések: A feladat általánosítása a kör alakú asztalka melletti négy székről szóló feladatnak (2043. feladat).

A *b)* részt úgy is meggondolhatjuk, hogy az egyik szín helyét rögzítjük, majd ahhoz képest színezzük a többit: $(n - 1)!$.

2048 Elsőnek azt kell meggondolnunk, hányféleképpen állíthatjuk elő a kilencet egyesek és kettesek összegeként, majd meg kell számolnunk, hogy az egyes eseteket hányféle különböző sorrendben írhatjuk fel. Végül az összes esetet össze kell adnunk. Például 5 egyes és 2 kettes összegét $\dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$-féle sorrendben állíthatjuk elő. Vigyünk rendszert a felírásba táblázat segítségével.

1-esek száma	9	7	5	3	1
2-esek száma	0	1	2	3	4
Sorrendjük formulával	1	$\dfrac{8!}{7! \cdot 1!}$	$\dfrac{7!}{5! \cdot 2!}$	$\dfrac{6!}{3! \cdot 3!}$	$\dfrac{5!}{1! \cdot 4!}$
Sorrendjük számszerűen	1	8	21	20	5

Hogy a feladatban feltett kérdést megválaszoljuk, össze kell adnunk az utolsó sor számait. A kilencfokú lépcsőt tehát 55-féleképp mászhatjuk meg, ha egyesével vagy kettesével lépkedünk.



2049 Legyen a megvásárolni kívánt érmék száma n. Ekkor az $n+3$ darab érmét, amiből n, illetve három egyforma,

$$\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3!}=\frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{3\cdot 2\cdot 1}=84$$

sorrendben lehet egymás mellé tenni a polcra. (A 84-t az üzleti partnertől tudjuk.) Alakítsuk át az utolsó egyenlőséget:

$$(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)=504.$$

Ha elvégezzük a szorzást, harmadfokú egyenletet kapunk, amelyet nem tudunk megoldani. Azonban most is csak pozitív egészek között keressük az n-t: bontsuk hát prímtényezők szorzatára az 504-et, ha a bal oldal már úgyis szorzat formában van:

$$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7.$$

A három zárójel olvasható úgy is, hogy három egymás utáni szám szorzata. Ki tudjuk úgy osztani 504 prímtényezőit, hogy ilyen számokat kapjunk? Igen, ránézésre adódik:

$$3^2=9=n+3,\quad 2^3=8=n+2,\quad 7=n+1.$$

Készen vagyunk, $n=6$. Ernő tehát összesen 6 érmére alkudozott.

Megjegyzések: Mivel egymás utáni számok szorzatáról van szó, írhattuk volna $(N+1)\cdot N\cdot(N-1)$ alakban is őket, ekkor $N=n+2$. Azonban összeszorozva így is csak egy N^3-N alakhoz jutunk, ami továbbra is harmadfokú egyenletre vezet.

A feladatot természetesen próbálkozással is megoldhatjuk. Mivel a három tényező közel van egymáshoz, az eredménynek 504 köbgyöke: $\sqrt[3]{504}\approx 7{,}958$ körül kell lennie. Valóban: a középső számnak 8-at kaptunk.

2050 *a)* A feladatban bár szerepel a „legalább” szó, nem érdemes áttérni az ellentett eseményre. Ugyanis 8-nak a fele 4, így nem lenne kevesebb a megvizsgálandó esetek száma.

Elsőként vizsgáljuk meg, hányféleképpen áll elő a 8 három pozitív egész szám összegeként, ahol az egyik szám legalább 4. Készítsünk egy táblázatot. A feltételek mellett a lehetőségek:

Csirkefalat	4	4	4	5	5	6
Szalonna	1	2	3	1	2	1
Gyümölcs	3	2	1	2	1	1
Sorrend a nyárson	$\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 3!}$	$\frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$	$\frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!}$	$\frac{8!}{5!\cdot 1!\cdot 2!}$	$\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}$	$\frac{8!}{6!\cdot 1!\cdot 1!}$

Az utolsó sorban összegyűjtöttük, hogy az egyes esetekben szereplő ételdarabkákat hányféle sorrendben tűzhetjük a nyársra. A feladat megoldását az alsó sorban levő számok összege adja:

$$280+420+280+168+168+56=1372.$$

Kriszta tehát az általa elkészíteni kívánt nyársat 1372-féleképpen állíthatja össze.

b) Csirkefalatokból:

$$4\cdot(280+420+280)+5\cdot(168+168)+6\cdot 56=5936$$

darabot kell szeletelnie, ami $10\cdot 5936=59\,360\text{ g}=59{,}36\text{ kg}$.

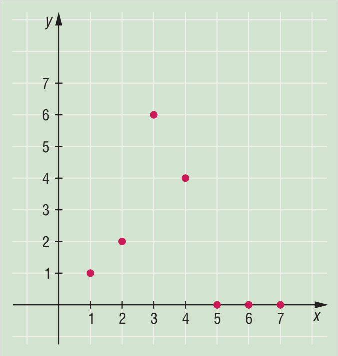
Szalonnából a szükséges mennyiség:

$$1\cdot 280+2\cdot 420+3\cdot 280+1\cdot 168+2\cdot 168+1\cdot 56=2520$$

darab, ami $10\cdot 2520=25\,200\text{ g}=25{,}2\text{ kg}$.

Gyümölcsből pontosan annyi darabka kell, mint szalonnából, így tömege is ugyanaz.





2051 *a)* Tudjuk, hogy n különböző elemet $n!$-féleképpen lehet sorba rendezni. Kezdjük el kiszámolgatni őket sorban:

$$1! = \mathbf{1},\quad 2! = \mathbf{2},\quad 3! = \mathbf{6},\quad 4! = 2\mathbf{4},\quad 5! = 12\mathbf{0},$$
$$6! = 72\mathbf{0},\quad 7! = 5\,04\mathbf{0},\quad 8! = 40\,32\mathbf{0},\ \ldots$$

Figyeljük meg, hogy $n = 5$-től mindegyik érték 0-ra végződik. Ez természetes: mivel minden szorzatban vannak páros számok, és legalább egy 5-ös, valamint megjelenik a 10. Így $A = \{0; 1; 2; 4; 6\}$, azaz $|A| = 5$.

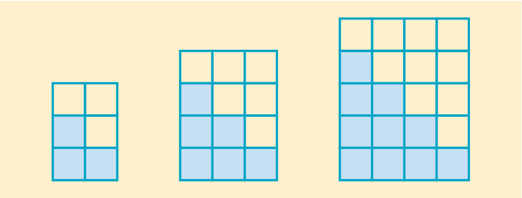
b) Az előző részfeladat alapján már könnyen ábrázoljuk a csak pontokból álló függvényt. A függvény $x = 5$ után minden egész helyen 0 értéket vesz fel.

2052 *a)* Az $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ összeget kell meghatároznunk. Ezt többféle trükkel is megtehetjük. Írjuk például az összeg alá még egyszer ugyanezen értékeket visszafelé, majd adjuk őket össze oszloponként:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline n+1 & + & n+1 & + & n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1. \end{array}$$

A vonal alatt n-szer szerepel $n + 1$. A keresett összeg ennek fele: $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Másik lehetőség, ha rajzolunk (ha már úgyis lépcsőről van szó). Mindegyik lépcsőt kiegészíthetjük téglalappá, ha elforgatjuk és saját maga mellé illesztjük. A téglalap egyik oldala n, a másik $n + 1$, nekünk viszont csak a fele kell.



Megjegyzések: Később rekurzív sorozatként is hivatkozhatunk a fenti összegre: az n. összeget megkapjuk, ha n-t adunk az $(n - 1)$. összeghez.

Ha tanuljuk majd, használhatjuk a *teljes indukciót* is a megsejtett formula igazolására.

b) Egy n-fokú lépcsőt $n!\cdot(n-1)!\cdot(n-2)!\cdot\ldots\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$-féleképpen tölthetünk ki számokkal. Írjuk át a szorzatot más alakba, soronként kifejtve a faktoriálisokat:

$$\begin{array}{l} \ \ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\ \cdot \\ \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\ \cdot \\ \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\ \cdot \\ \cdot\vdots \\ \cdot 1\cdot 2\cdot 3\ \cdot \\ \cdot 1\cdot 2\ \cdot \\ \cdot 1. \end{array}$$

Egy ilyen szorzat egyetlen n, kettő $(n - 1)$, három $(n - 2)$, …, $n - 2$ darab 3-as, $n - 1$ darab 2-es és n darab 1-es tényezőt tartalmaz. Azaz így is írható:

$$n\cdot(n-1)^2\cdot(n-2)^3\cdot\ldots\cdot 3^{n-2}\cdot 2^{n-1}\cdot 1^n.$$

Azt, hogy egy szám végén mennyi 0 van, a benne megtalálható 2 és 5 prímtényező-párok száma dönti el. Ebben a szorzatban pontosan öt darab $2\cdot 5$ párnak kell lennie. Mivel 2-ből mindig több lesz, mint 5-ből, hiszen minden második szám páros, ezért koncentráljunk az 5-re. Még inkább az 5 kitevőjére: pontosan 5-nek kell lennie. Mivel a kitevők egyesével csökkennek, így az ötös előtt még négy számnak kell állnia, tehát $n = 9$. Ellenőrizzük: $9^1\cdot 8^2\cdot 7^3\cdot 6^4\cdot 5^5\cdot 4^6\cdot 3^7\cdot 2^8\cdot 1^9$.

Ebben a szorzatban pontosan 5 darab 5-ös prímtényező szerepel. Ezekhez párosítva ketteseket, éppen öt nullára fog végződni a szám. (9-nél kevesebb nem lehet n, mert akkor az 5 kitevője is csökken.)

c) Az előző elgondolás alapján nem lehetséges, hiszen ha eggyel tovább lépünk $n = 10$-re, akkor $10^1 \cdot 9^2 \cdot 8^3 \cdot 7^4 \cdot 6^5 \cdot 5^6 \cdot 4^7 \cdot 3^8 \cdot 2^9 \cdot 1^{10}$ szorzatban van 6 darab 5-ös prímtényező az 5^6-ban, de van egy a 10-ben is. Azaz nem tudunk pontosan 6 darab 5-öst tartalmazó szorzatot készíteni.

Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek) – megoldások

2053 $5 \cdot 4 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20.$

2054 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 15\,120.$

2055 $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210.$

2056 *a)* $21! \approx 5{,}1 \cdot 10^{19}$; *b)* $21 \cdot 20 \cdot 19 = \frac{21!}{(21-3)!} = 7\,980.$

2057 $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = \frac{36!}{(36-7)!} = 42\,072\,307\,200.$

2058 $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 = \frac{20!}{(20-8)!} = 5\,079\,110\,400.$

2059 $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \frac{30!}{(30-6)!} = 427\,518\,000.$

2060 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{7!}{(7-4)!} = 840.$

Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is) – megoldások

2061 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$

2062 $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729.$

2063 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$ (ha üresen is hagyhat: $4^7 = 16\,384$).

2064 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$

2065 $37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 = 37^5 = 69\,343\,957.$

2066 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$

2067 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$



2068 *a)* Panna 4 tisztséget szeretne kiosztani az osztályban (ez nem könnyű feladat). Valamilyen sorrendet felállít a tisztségek között, majd húznak: az első tisztségre 28-ból, a másodikra 27-ből, a harmadikra 26-ból, végül 25-ből választanak. Vagyis:

$$28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \frac{28!}{(28-4)!} = 491\,400$$

lehetőségük van, ha visszatevés nélkül húznak.

b) Ha visszateszik az éppen kihúzott nevét, akkor ő újra indul a következő választáson is. Ekkor az egyes húzások egymástól függetlenek. A kérdésre:

$$28 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 28 = 28^4 = 614\,656$$

lehetőség adódik (bár így az is lehet, hogy egyetlen személy lesz a titkár, a gazdaságis, a kultúros és a sportos).

2069 *a)* Minden tárcsát 7 állapotba forgathatunk egymástól függetlenül, így a válasz:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401.$$

b) Négyjegyű számot akarunk előállítani, vagyis az első jegy nem lehet zérus. Arra marad 6 lehetőség, a többi számjegy viszont akármi lehet. Az eredmény:

$$6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058.$$

2070 *a)* Ha mindenki másféle fagyit kért, akkor az első 20-féléből választott, a következő 19, aztán 18, 17, 16-féléből választottak (képzeljük úgy, hogy minden fagyiból csak egy gombóc volt). A válasz:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = \frac{20!}{(20-5)!} = 1\,860\,480.$$

b) Ha legalább ketten azonost kértek, akkor kérhettek ketten, hárman, négyen vagy akár öten is egyformát. Még felsorolni is sok eset (bár vannak közöttük egyszerűek). Próbáljuk meg ellenkezőleg! Számoljuk ki, mennyi eset ez összesen (bárki kérhet bármit), majd vonjuk ki azt, amikor mindenki másfajta fagyit kér (az előző eset). Számszerűen:

$$20^5 - \frac{20!}{(20-5)!} = 1\,339\,520.$$

Megjegyzés: Sokszor érdemes az esetek összeszámolásánál áttérnünk az ellenkező, komplementer események összeszámolására. A feladat szövegében a „legalább”, „legfeljebb” szavak árulkodnak általában arról, hogy így könnyebb lesz a feladatot megoldani.

2071 *a)* Ha van kettő, akkor lehet három, négy, öt vagy akár hat egyforma is (ráadásul lehet többféle számjegyből is több). Térjünk át a komplementer eseményre, azaz amikor minden számjegy különböző. Mivel 0-t nem írhatunk az első számjegy helyére, az összes esetek száma:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5 = 900\,000.$$

Ebből vonjuk le a csak különböző jegyeket tartalmazó hatjegyű számokat:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\,080$$

(elsőnek 0-t nem írhatunk, másodiknak viszont nem írhatjuk az elsőt, de 0-t igen). A válasz a kettő különbsége: 763 920.

b) A hatos számrendszerben hat számjegy van: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ezek közül nem tudunk úgy 12 jegyű számot készíteni, hogy ne legyen legalább egy jegy többször (már hétjegyűt sem tudnánk).

Mivel minden szám ilyen, számoljuk össze őket. Első helyen 0 nem állhat, utána viszont bármi:

$$5 \cdot 6^{11} = 1\,813\,985\,280.$$



c) A 12-es számrendszerben 12 számjegy van. Első helyre 0-t nem írhatunk, másodiknak pedig nem írhatjuk az elsőt, de 0-t már igen. Aztán a felhasznált jegyekkel csökken a további lehetőségek száma:

$$11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 609\,840.$$

Megjegyzés: A *b)* részfeladatban milyen *elvet* használunk?

2072 *a)* 26 betű kétszer, illetve 10 számjegy négyszer alkalmazva, egymástól függetlenül:

$$26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000.$$

b) A mai rendszámhoz a régiben egy számot betűre cseréltek, azaz eredményünket 10-zel osztanunk és 26-tal szoroznunk kell. Vagyis 2,6-szer több rendszámot lehet (elvileg) az új rendszerben kiadni.

Megjegyzés: Természetesen nem minden kombinációt engedélyeznek a hatóságok, illetve vannak extra rendszámok is (egy betű-öt szám például).

2073 Két megoldást is adunk. Elsőnek kedvezzünk a formulák szerelmeseinek.

I. megoldás. Tételezzük fel, hogy Ernő n darabot állíthat ki érméi közül ($0 < n \le 15$). Ezeket $\dfrac{15!}{(15-n)!}$-féleképpen teheti sorba a vitrinben. Ha eggyel növekszik a kiállítható érmék száma, akkor sorba rakásukra $\dfrac{15!}{\big(15-(n+1)\big)!}$ lehetőség lesz. Adódik egy egyszerű egyenlet, ahol 15!-sal egyszerűsíthetünk, majd mindkét oldalt megszorozhatjuk $\big(15-(n+1)\big)!$-sal:

$$12 \cdot \frac{15!}{(15-n)!} = \frac{15!}{\big(15-(n+1)\big)!},$$

$$\frac{12}{15-n} = 1,$$

$$n = 3.$$

II. megoldás. Ennél jóval egyszerűbb, ha elkezdjük a szorzást elvégezni: az első helyre 15-féle, a másodikra 14-féle stb. érmét tehet Ernő. A kérdés: meddig menjünk el, hogy 12-szeresére növekedjen a szorzat? A válasz: 13-ig, $12 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$. Vagyis Ernő 3 érmét állíthat ki.

2074 Tegyük fel először, hogy p darab betűt (az abc elejéről) és q darab számot (0-val kezdve) akarunk felhasználni egymástól függetlenül. A három betű-három szám kombináció így összesen $p^3 \cdot q^3 = 8000$ lehetőséget ad. Ezt a kétismeretlenes egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán.

Bontsuk fel 8000-t prímtényezőkre: $8000 = 2^6 \cdot 5^3$. A kapott szorzatot állítsuk elő két harmadik hatvány szorzataként. A lehetőségek a következők:

p^3	1^3	2^3	$(2 \cdot 2)^3$	5^3	$(2 \cdot 5)^3$	$(2 \cdot 2 \cdot 5)^3$
q^3	$(2 \cdot 2 \cdot 5)^3$	$(2 \cdot 5)^3$	5^3	$(2 \cdot 2)^3$	2^3	1^3

Mivel q a számjegyeket jelöli, nem lehet 10-nél több. Ezért az első lehetőség kiesik. Marad a (2; 10), (4; 5), (5; 4), (10; 2) és (20; 1) a $(p; q)$ párokra. Tehát öt megoldás is adódik a távoli bolygó távoli kis országának a rendszámtáblák kidolgozására.

Megjegyzések: A p értéke sem lehet 26-nál több, de ez most nem volt érdekes. Az egyenletet *diofantoszi egyenletnek* nevezzük, ha csak egész megoldásokat keresünk. Ha nem jut eszünkbe a 8000 prímtényezőkre bontása, kísérletezéssel is megtalálhatjuk a megoldásokat.

2075 A feladat szövege tartalmazza a „legalább” kifejezést. Ebből azt sejtjük, hogy érdemes áttérni a komplementer eseményre. Az ellentett esemény az, ha a kapus nem végez el egyetlen szabadrúgást sem. Az összes eset pedig, ha bármelyik szabadrúgást bármelyik játékos rúghatja a 11-ből. Vagyis a kérdésre a válasz: $11^5 - 10^5 = 61\,051$-féleképpen végezhették el az öt szabadrúgást a csapat játékosai.

Megjegyzés: Ha nem térünk át a komplementer eseményre, akkor is nekiállhatunk a számításoknak. Vegyük sorba, hány szabadot rúghatott a kapus! Menjünk visszafelé: ha mind az ötöt ő rúgta, azt egyféleképpen tehette meg. Ha négyet, akkor egyet más játékos rúgott: $5 \cdot 10 = 50$ lehetőség. Ha hármat rúgott a kapus, akkor az összesen $\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 10^2 = 1000$ lehetőség. Ha kettőt, akkor majdnem az előzőt kapjuk, $\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 10^3 = 10\,000$. Végül ha csak egyet, akkor $5 \cdot 10^4 = 50\,000$. Ezek összege ismét $61\,051$.

2076 Ha legfeljebb ötöt rúgott a legendás Bekkem, akkor rúghatott 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 szögletet. Ennél jóval egyszerűbb a komplementer eseményt összeszámolni, abban ugyanis csak kettő eset van: ha hat, vagy hét szögletet adott be. Mind a hetet egyféleképpen rúghatta Dávid. Hatot pedig $7 \cdot 9 = 63$-féleképpen (ne feledjük, a hétből egyet rúgott valaki más és Bekkemen kívül még 9 mezőnyjátékos van nagypályán). Azaz eseteink száma:

$$10^7 - (1 + 63) = 9\,999\,936.$$

Megjegyzés: Ha mégis nekiállunk az eredeti esetek összeszámolásához, akkor a

$$9^7 + 7 \cdot 9^6 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 9^5 + \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 9^4 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 9^3 + \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 9^2$$

összeget kell meghatároznunk.

2077 Most is érdemes áttérni az ellentett események összeszámolására. (Eredetileg 0, 1, 2, 3 vagy 4 csirkefalat lehet – érdemesebb helyettük 5, 6 vagy 7-t tekinteni.) Ha a nyárson minden falat csirke, azt egyféleképpen állíthatja össze Kriszta. Ha hat, akkor $7 \cdot 2 = 14$ lehetősége van. Ha öt, akkor a lehetőségek száma $\frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 2^2 = 84$. Ezek összegét kell levonnunk az összes lehetőségből, ami most 3^7 (mivel a nyárs összes helyére háromféle ételből kerülhet egy). Ezek alapján az eredmény:

$$2187 - (1 + 14 + 84) = 2088.$$

Megjegyzés: Nem térve át a komplementerre:

$$2^7 + 7 \cdot 2^6 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 2^5 + \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 2^4 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 2^3 = 2088.$$

Vegyes feladatok – megoldások

2078 *a)* Ha tavasz van, akkor a madarak csicseregnek.

b) Ha a madarak csicseregnek, akkor tavasz van.

c) Akkor és csak akkor van tavasz, ha a madarak csicseregnek.

2079 *a)* Négy oldala egyenlő; mind a négy szöge 90° és mind a négy oldala 3 cm; mind a négy oldala egyenlő hosszúságú és mind a négy szöge 90°-os.

b) Páros; osztható 24-gyel; osztható 3-mal és 4-gyel.



2080 Skatulyák: percek.

2081 $6! = 720.$

2082 $10! = 3\,628\,800.$

2083 $\dfrac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210.$

2084 $\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \dfrac{6!}{(2!)^3} = 90.$

2085 $4 \cdot 7 = 28.$

2086 *a)* $32! \approx 2{,}631 \cdot 10^{35};$ *b)* $\dfrac{32!}{(8!)^4} \approx 9{,}956 \cdot 10^{16};$ *c)* $\dfrac{32!}{(4!)^8} \approx 2{,}39 \cdot 10^{24}.$

2087 *a)* $3^8 = 6561;$ *b)* $3 \cdot 2^7 = 384.$

2088 $2^{10} = 1024.$

2089 $\dfrac{30!}{(30-6)!} = 427\,518\,000.$

2090 $\dfrac{10!}{(10-4)!} = 5040.$

2091 4 db: $\dfrac{12!}{(12-4)!} = 11\,880;$ 3 db: $\dfrac{12!}{(12-3)!} = 1320;$ 2 db: $\dfrac{12!}{(12-2)!} = 132;$ 1 db: $\dfrac{12!}{(12-1)!} = 12.$

Mindösszesen:

$$11\,880 + 1320 + 132 + 12 = 13\,344.$$